

Projet d'Analyse Numérique

GAZALIOU Hack, CARDOT Jules

2024/2025

Introduction

En 1997, la NASA, en collaboration avec l'ESA et l'ASI, lance la mission d'exploration spatiale Cassini-Huygens avec pour objectif l'exploration de Saturne, de ses lunes et de ses anneaux. La résolution de l'équation du mouvement de la sonde C-H constitue un problème à N-corps qui ne peut être résolu analytiquement. L'objectif de ce projet est d'approcher numériquement une solution simplifiée en modélisant l'orbite de la sonde. Nous allons pour cela dans un premier temps établir les équations du modèle, puis implémenter différents schémas numériques qui nous permettront de visualiser les résultats de ce dernier. On s'intéressera également aux différences entre les schémas utilisés, notamment en termes de stabilité ou de vitesse de convergence.

Paramétrage

- Le mouvement de la sonde est étudié dans le référentiel héliocentrique auquel est associé le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
- La sonde est repérée par la position de son centre d'inertie G auquel est associé le vecteur $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OG}$ et l'angle $\theta(t)$.
- La planète Vénus est repérée par la position de son centre d'inertie G_v auquel est associé le vecteur $\vec{r}_v(t) = \overrightarrow{OG_v}$ et l'angle $\theta_v(t)$.

Hypothèses

- Seuls le Soleil et Vénus ont une influence gravitationnelle significative sur la trajectoire de la sonde.
- Le propulseur de la sonde n'étant pas utilisé lors du survol de Vénus, sa poussée n'est pas prise en compte.
- Les trajectoires de la sonde et de Vénus sont considérées comme coplanaires (plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$). Aussi, les vecteurs position s'expriment en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} \quad \vec{r}_v(t) = x_v(t)\vec{x} + y_v(t)\vec{y}$$

- L'orbite de Vénus autour du Soleil, considérée comme quasiment circulaire, est décrite par les équations :

$$\begin{cases} x_v(t) = r_v \cos(\Omega t + \Phi) \\ y_v(t) = r_v \sin(\Omega t + \Phi) \end{cases}$$

avec $r_v = 1,08209 \times 10^{11}$ m, $\Omega = \theta_v = 3,23639 \times 10^{-7}$ rad $\cdot$ s $^{-1}$, et Φ la position angulaire initiale de Vénus.

Équation du mouvement Le mouvement de la sonde est défini par l'équation suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_s\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3} - \frac{Gm_v(\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t))}{\|\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t)\|^3}$$

avec :

- G : constante universelle de gravitation,
- m_s : masse du Soleil,
- m_v : masse de Vénus,
- $Gm_s = 1,32724 \times 10^{20} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$,
- $Gm_v = 3,24916 \times 10^{14} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$.

On note m la masse de la sonde.

1 Modélisation du problème

1.1 Justification de l'équation du mouvement

D'après le **principe fondamental de la dynamique**, la somme des forces exercées sur la sonde de masse m est égale au produit de sa masse par son accélération :

$$\sum \vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Les seules forces considérées ici sont les forces gravitationnelles exercées par le Soleil et par Vénus. D'après la **loi de la gravitation universelle de Newton**, la force exercée par un astre de masse M situé en un point A sur la sonde placée en G est donnée par :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{\|\vec{GA}\|^3} \vec{GA}$$

On applique cela :

- Le Soleil est situé à l'origine O , donc la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la sonde est :

$$\vec{F}_{\text{Soleil}} = -G \frac{mm_s}{\|\vec{r}(t)\|^3} \vec{r}(t)$$

- Vénus est située en G_v , donc la force gravitationnelle exercée par Vénus sur la sonde est :

$$\vec{F}_{\text{Vénus}} = -G \frac{mm_v}{\|\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t)\|^3} (\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t))$$

On additionne ces deux forces :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{Soleil}} + \vec{F}_{\text{Vénus}}$$

On injecte dans le PFD :

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -G \frac{mm_s}{\|\vec{r}(t)\|^3} \vec{r}(t) - G \frac{mm_v}{\|\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t)\|^3} (\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t))$$

En divisant par m (la masse de la sonde), on obtient l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_s\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3} - \frac{Gm_v(\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t))}{\|\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t)\|^3}$$

1.2 Projection de l'équation

On projette l'équation du mouvement sur les axes x et y :

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_s\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3} - \frac{Gm_v(\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t))}{\|\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t)\|^3}$$

sur les directions $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Normes utilisées :

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad \|\vec{r}(t) - \vec{r}_v(t)\| = \sqrt{(x(t) - x_v(t))^2 + (y(t) - y_v(t))^2}$$

Projection sur l'axe x :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_sx(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}} - \frac{Gm_v(x(t) - x_v(t))}{[(x(t) - x_v(t))^2 + (y(t) - y_v(t))^2]^{3/2}}$$

Projection sur l'axe y :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{Gm_sy(t)}{(x^2(t) + y^2(t))^{3/2}} - \frac{Gm_v(y(t) - y_v(t))}{[(x(t) - x_v(t))^2 + (y(t) - y_v(t))^2]^{3/2}}$$

On note alors :

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S_x(x(t), y(t), t) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} = S_y(x(t), y(t), t) \end{cases}$$

2 Mise en place d'un premier schéma numérique

Par la suite, on notera u_i et v_i les approximations des composantes du vecteur vitesse $(v_x(t), v_y(t))$ à l'instant t_i , avec :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{et} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

et x_i et y_i , les approximations des composantes du vecteur position $(x(t), y(t))$ à l'instant t_i .

2.1 Relations de récurrence

Vitesse En utilisant la méthode d'Euler explicite, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \Delta t \cdot S_x(x_i, y_i, t_i) \\ v_{i+1} = v_i + \Delta t \cdot S_y(x_i, y_i, t_i) \end{cases}$$

Position De la même manière, on obtient les deux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot u_i \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot v_i \end{cases}$$

3 Programmation du schéma d'Euler

Résolution numérique sans Vénus

En résolvant numériquement l'équation, on obtient le graphe suivant :

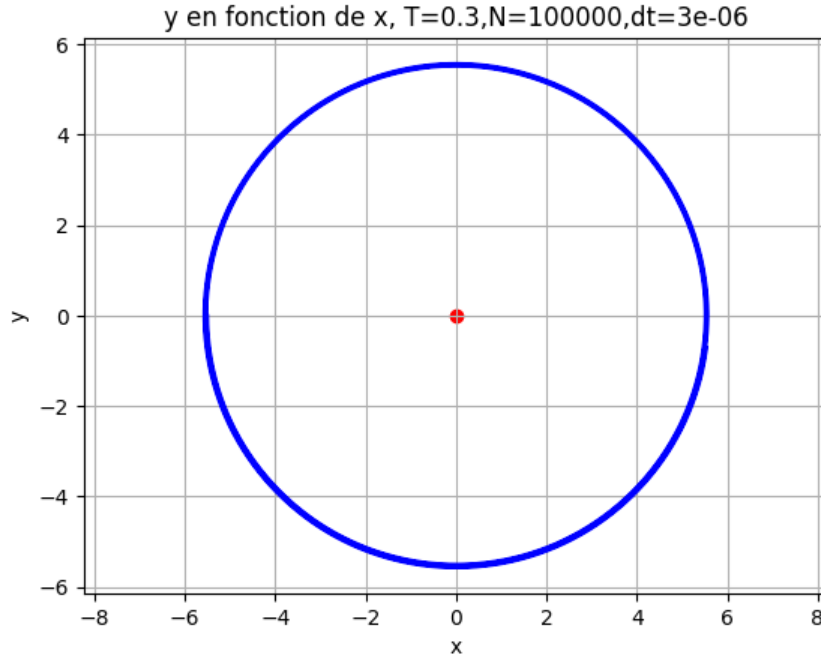


FIGURE 1 – Trajectoire de la sonde $y(0)=0$, $G_{mv} = 0$

La solution semble être une trajectoire circulaire de centre $(0,0)$ et de rayon 5,5. Ce résultat nous permet de formuler une conjecture sur l'expression de la trajectoire de la sonde. En supposant que cette trajectoire soit circulaire, elle peut s'écrire sous la forme paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

où R désigne le rayon de l'orbite et, ω la pulsation (vitesse angulaire), et ϕ la phase initiale.

Résolution analytique (sans influence de Venus)

Nous considérons la trajectoire de la sonde soumise uniquement à l'attraction gravitationnelle du Soleil. Le mouvement est régi par l'équation :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{G_{ms}}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

Passage en coordonnées polaires On exprime le mouvement en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan de la trajectoire. Le vecteur position est $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$. L'accélération s'écrit alors en coordonnées polaires :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Comme la force est centrale (dirigée selon $\vec{e}_r$), la composante tangentielle est nulle, donc :

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Ce qui donne la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = h = \text{constante}$$

Avec h le moment angulaire spécifique de la sonde.

Équation de Binet On introduit le changement de variable :

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{et donc} \quad r = \frac{1}{u}$$

En utilisant la relation $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$, et les dérivées successives, on obtient l'équation de Binet :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{G_{ms}}{h^2}$$

Solution de l'équation de Binet L'équation différentielle $u'' + u = \frac{G_{ms}}{h^2}$ est linéaire, d'ordre 2 à coefficients constants. Sa solution générale est :

$$u(\theta) = \frac{G_{ms}}{h^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

avec e l'excentricité de la trajectoire et θ_0 une constante d'intégration.

Conclusion sur la trajectoire On retrouve l'équation d'une conique. Si $e = 0$, la trajectoire est circulaire :

$$u(\theta) = \frac{1}{r} = \frac{G_{ms}}{h^2} \Rightarrow r = \text{constante}$$

Ce qui confirme que la trajectoire est un cercle de rayon constant lorsque l'excentricité e est nulle.

Montrons que $e = 0$ On considère la vitesse initiale au temps $t = 0$ donnée par

$$v(0) = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$$

avec

$$v_{y0} = \sqrt{\frac{G_{ms}}{r}}$$

et $v_{x0} = 0$.

Le moment angulaire spécifique est alors

$$h = r v_{y0} = r \sqrt{\frac{G_{ms}}{r}} = \sqrt{G_{ms} r}.$$

On rappelle l'équation de Binet qui décrit la trajectoire :

$$u(\theta) = \frac{1}{r} = \frac{G_{ms}}{h^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)).$$

Calculons le coefficient :

$$\frac{G_{ms}}{h^2} = \frac{G_{ms}}{G_{ms}r} = \frac{1}{r}.$$

Ainsi,

$$u(\theta) = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)).$$

Pour que cette relation soit vraie pour tout θ , il faut nécessairement que

$$1 + e \cos(\theta - \theta_0) = 1,$$

c'est-à-dire

$$e \cos(\theta - \theta_0) = 0 \quad \forall \theta.$$

Cela implique que

$$e = 0.$$

Ainsi, la trajectoire est circulaire dès que la vitesse initiale vaut $v(0) = \sqrt{G_{ms}/r}$, ce qui est bien le cas dans cette étude. La résolution analytique confirme donc la conjecture précédente.

3.1 Vitesse de convergence

En utilisant la méthode d'Euler explicite, l'erreur globale est de la forme :

$$\varepsilon(N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Ainsi,

$$\log(\varepsilon(N)) = -\log(N) + C$$

On trace donc la courbe $\log_{10}(\varepsilon) = f(\log_{10}(N))$, et on obtient le graphe suivant :

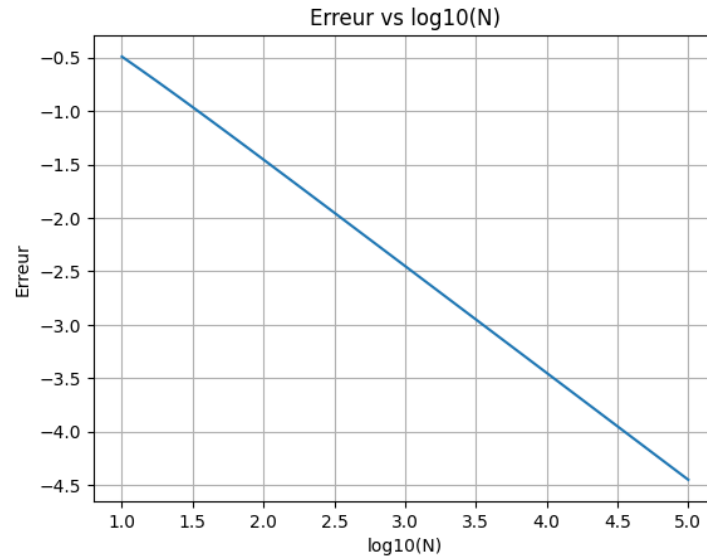


FIGURE 2 – Évolution de $\log_{10}(\text{erreur})$ en fonction de $\log_{10}(N)$ (Euler)

On constate que la relation entre $\log_{10}(\varepsilon)$ et $\log_{10}(N)$ est linéaire de pente proche de -1 .

On en déduit donc que la vitesse de convergence de la méthode d'Euler explicite est de l'ordre de $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$.

3.2 Conservation de l'énergie mécanique

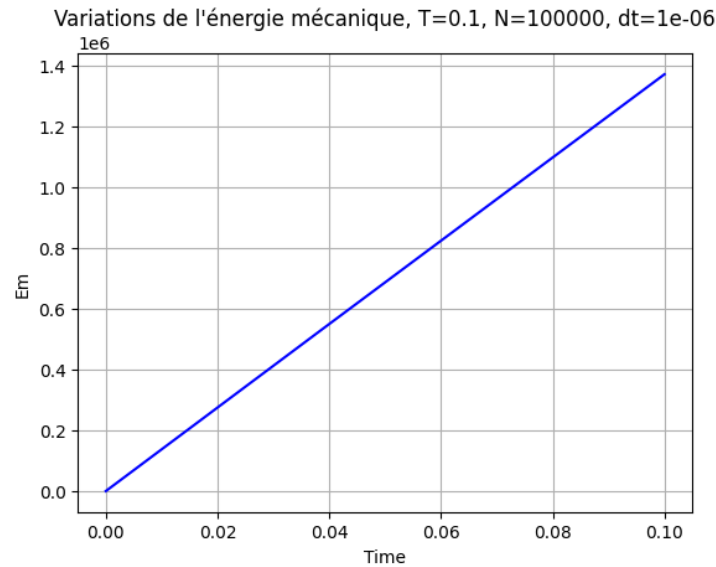
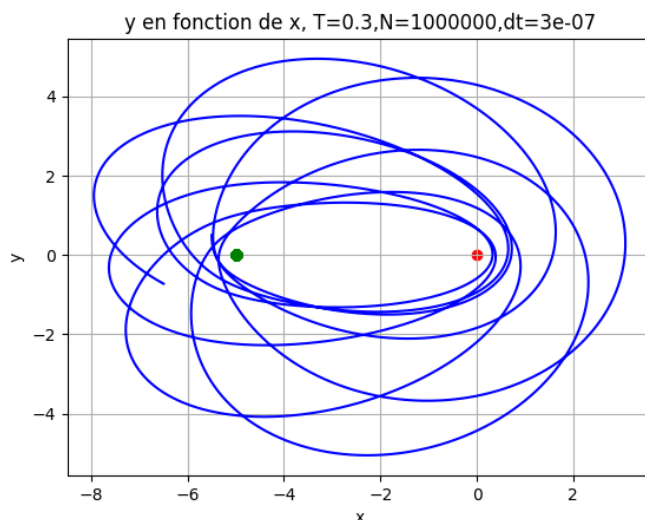


FIGURE 3 – Évolution de l'énergie mécanique (initialement ramenée à zéro)

On observe que l'énergie mécanique n'est pas constante au cours du temps : elle varie progressivement. Cela signifie qu'elle n'est pas conservée par le calcul. Ce comportement s'explique par le fait que la méthode d'Euler explicite n'est pas adaptée pour conserver l'énergie dans un système physique. Elle introduit des erreurs à chaque pas de temps, qui s'accumulent. Ainsi, plus la simulation dure longtemps, plus l'énergie dérive. Ce résultat est attendu avec cette méthode simple, mais peu précise.

3.3 Trajectoire en considérant Venus

On trace la trajectoire de la sonde, cette fois en prenant en compte la présence de Venus, on obtient le graphe suivant :



La méthode d'Euler est suffisamment stable pour tracer plusieurs révolutions autour des deux astres, mais on constate que pour une période supérieure à 1s, la méthode diverge, ou nécessite un temps de calcul important.

FIGURE 4 – Trajectoire de la sonde. En rouge le Soleil et en vert Venus.

3.4 Gain de vitesse

Afin de quantifier le gain de vitesse que l'assistance gravitationnelle de Venus offre à la sonde, on propose les graphes suivants :

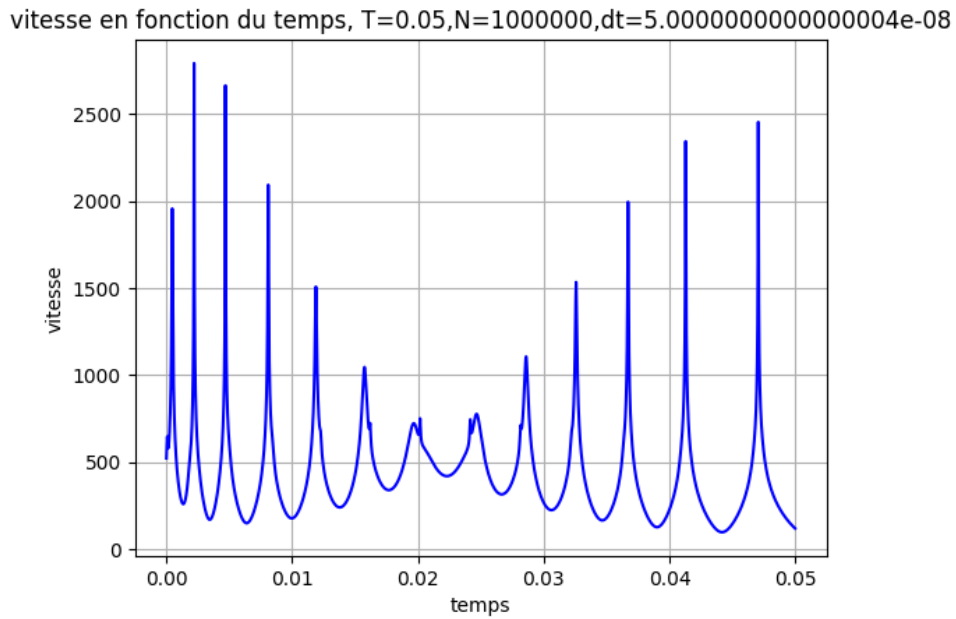


FIGURE 5 – Évolution de la vitesse de la sonde au cours du temps

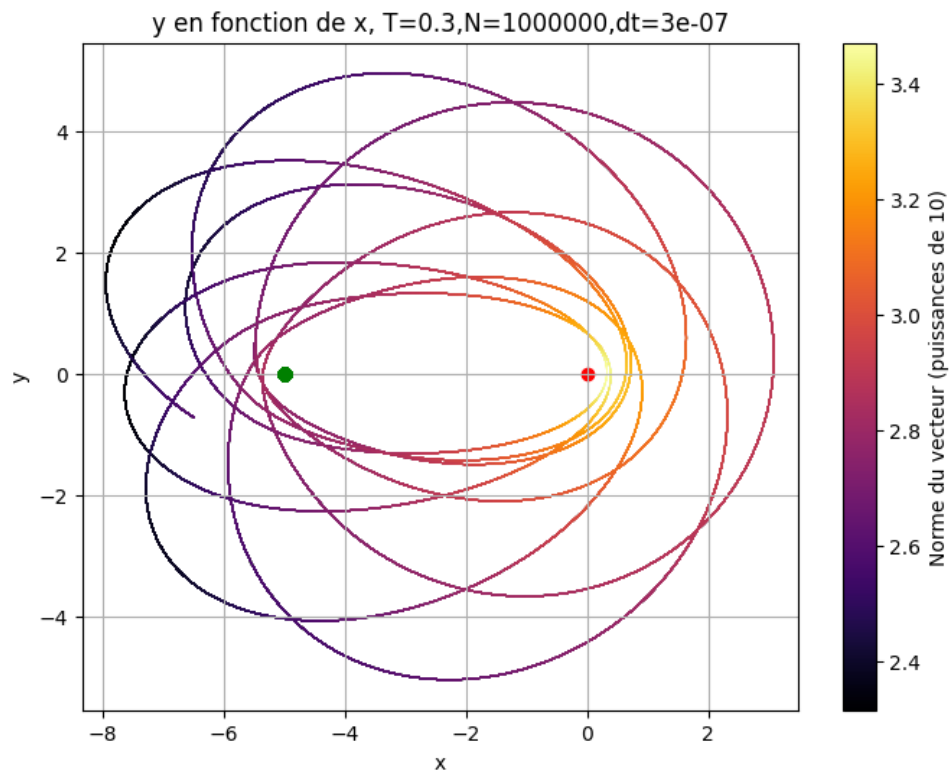


FIGURE 6 – Gain de vitesse au cours de la trajectoire

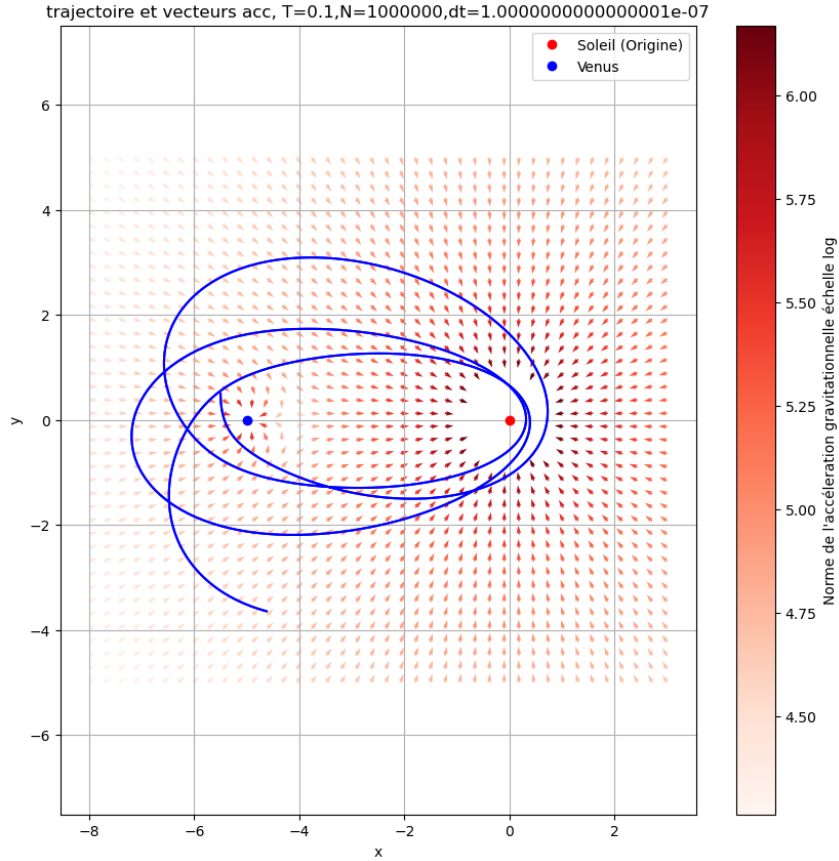


FIGURE 7 – Trajectoire dans le champ force

La figure 5 présente les variations de vitesse de la sonde au cours du temps, on interprète les pics de vitesses comme les passages près du soleil. Les passages à côté de Venus sont difficilement distinguables, car ils précèdent systématiquement l’approche du Soleil, qui offre un gain de vitesse plus important. La courbe croît donc légèrement avant d’atteindre un pic soudain à chaque révolution. On constate également qu’au milieu de la période, la magnitude s’amenuit. On interprète cela comme l’éloignement de la sonde des deux astres, qui a pour conséquence d’amoinrir les gains de vitesse qu’ils lui accordent. Lorsque son orbite se rapproche à nouveau des deux astres, les pics de vitesse redeviennent plus marqués.

La figure 6 quant à elle décrit aussi l’évolution de la vitesse de la sonde, mais cette fois en adoptant un point de vue positionnel. Les variations de vitesse de la sonde sont décrites par une échelle colorimétrique (les valeurs indiquées sur l’échelle correspondent au logarithme en base 10 des valeurs réelles). Ce graphe montre que les vitesses les plus importantes sont atteintes à proximité du Soleil, ce qui confirme les interprétations, faites grâce à la figure 5. Dans une moindre mesure, la présence de Venus profite aussi au déplacement la sonde en lui faisant gagner de la vitesse.

La figure 7 montre la magnitude des champs d’attraction de Venus et du Soleil. Ce champ de vecteurs permet d’interpréter les accélérations vues en figure 6 et de les attribuer à chacun des deux astres.

4 Programmation du schéma de Verlet

On écrit les développements limités (au sens fort) de $\vec{r}(t)$ à l'ordre 3 au voisinage de t , aux instants $t + \Delta t$ et $t - \Delta t$:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\vec{r}^{(3)}(t)\Delta t^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

$$\vec{r}(t - \Delta t) = \vec{r}(t) - \dot{\vec{r}}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\vec{r}^{(3)}(t)\Delta t^3 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

En additionnant ces deux expressions, on obtient :

$$\vec{r}(t + \Delta t) + \vec{r}(t - \Delta t) = 2\vec{r}(t) + \ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

Soit :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t - \Delta t) + \ddot{\vec{r}}(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

Puisque $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t)$, on peut aussi écrire :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = 2\vec{r}(t) - \vec{r}(t - \Delta t) + \vec{a}(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

Cette relation constitue la base du schéma que nous allons construire. Elle montre en effet que l'on peut approximer la position d'un corps en un instant, en ne faisant intervenir que sa position aux deux instants précédents et son accélération au dernier instant (en particulier, on se passe de sa vitesse). En utilisant une méthode se basant dessus, on réduit la quantité de calcul et on réduit l'erreur en supprimant sa composante liée à l'approximation de la vitesse (comme dans le schéma d'Euler par exemple). De plus, cette relation nous garantit que l'erreur commise sur la position est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^4)$.

4.1 Construction du schéma numérique

Le schéma de Verlet diffère du schéma d'Euler pour les raisons énoncées précédemment, mais aussi, car il demande une condition initiale de plus. Cette condition (position au deuxième instant de la sonde) est obtenue par la méthode d'Euler explicite. On implémente ensuite l'équation trouvée précédemment, projetée sur les axes x et y . Les accélérations, elles, sont calculées de la même manière que dans le schéma d'Euler (formules S_x et S_y). Ce nouveau schéma fournit les résultats suivants.

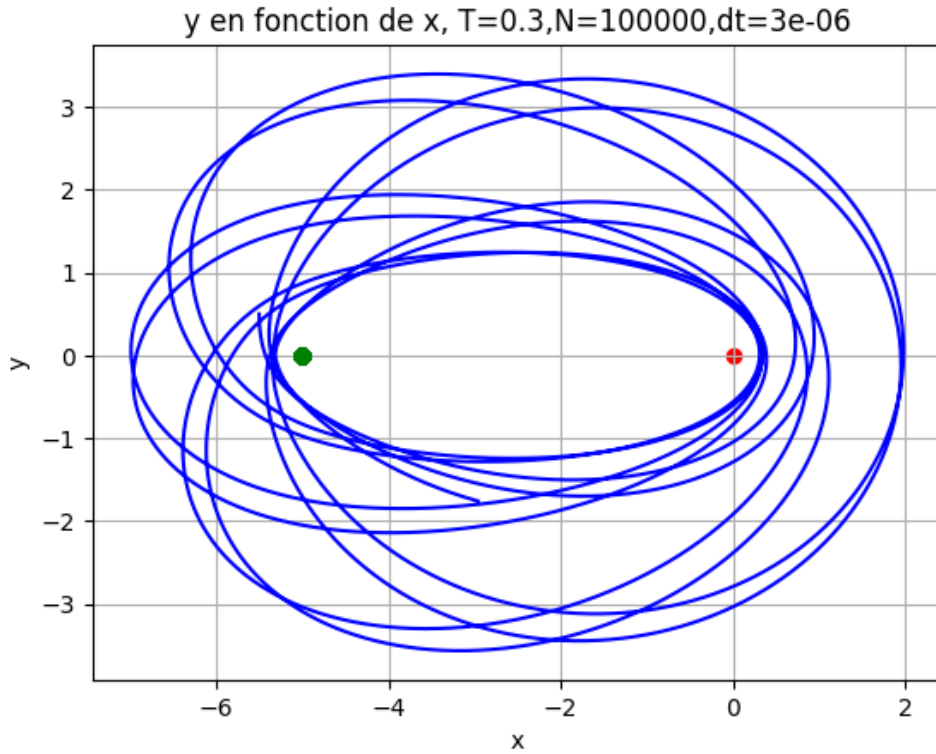


FIGURE 8 – Trajectoire de la Sonde (Verlet)

On constate que la trajectoire décrite est très similaire à l'approximation faite par le schéma d'Euler. L'intérêt du schéma de Verlet est le gain de stabilité qu'il apporte. En effet, il nous permet de travailler avec des périodes plus longues que ce dont est capable le schéma d'Euler avant de diverger.

4.2 Comparaison des deux schémas

Stabilité Afin de comparer la stabilité des deux schémas utilisés précédemment, on fixe la valeur de N , puis on augmente progressivement T jusqu'à ce que les modèles divergent. On fixe N à 100000 divisions et on fait varier T à partir de 0.3 unité de temps. En utilisant le schéma d'Euler, on constate que même si la sonde n'est, pour des valeurs de T raisonnables (caractérisées par des temps de calcul de l'ordre de la minute), pas expulsée de son orbite. Cela dit, on observe qu'à mesure que T croît, le rayon couvert par sa trajectoire croît sans limites, ce qui constitue une incohérence vis-à-vis du phénomène décrit.

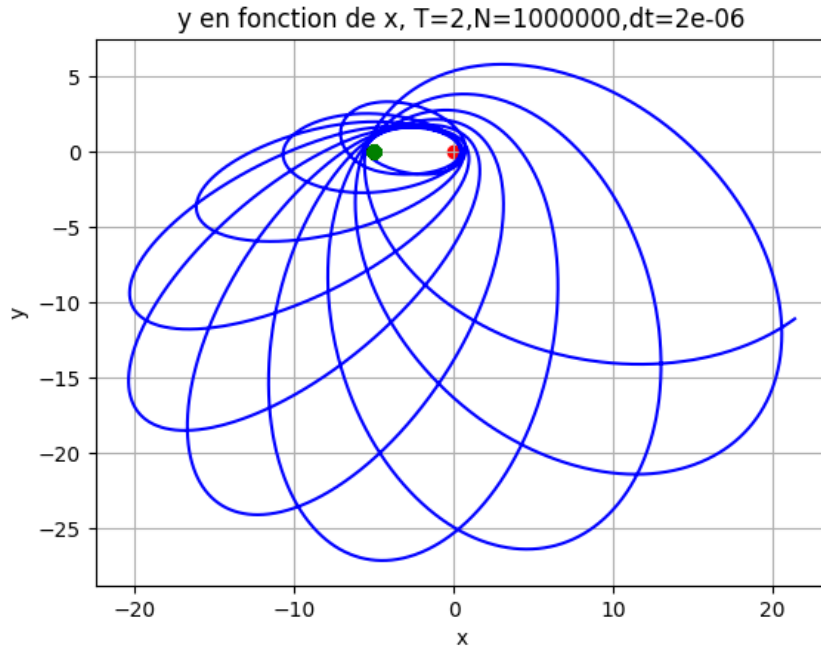


FIGURE 9 – Dérive de la trajectoire (Euler)

Le schéma de Verlet quant à lui, même pour des valeurs de T élevées, fournit des trajectoires elliptiques d'amplitudes bornées par une ellipse de grand-axe inférieur à 10 et de petit-axe inférieur à 8. Cette évolution des trajectoires en fonction de la période est bien plus appropriée, dans la mesure où le phénomène étudié n'est pas divergent.

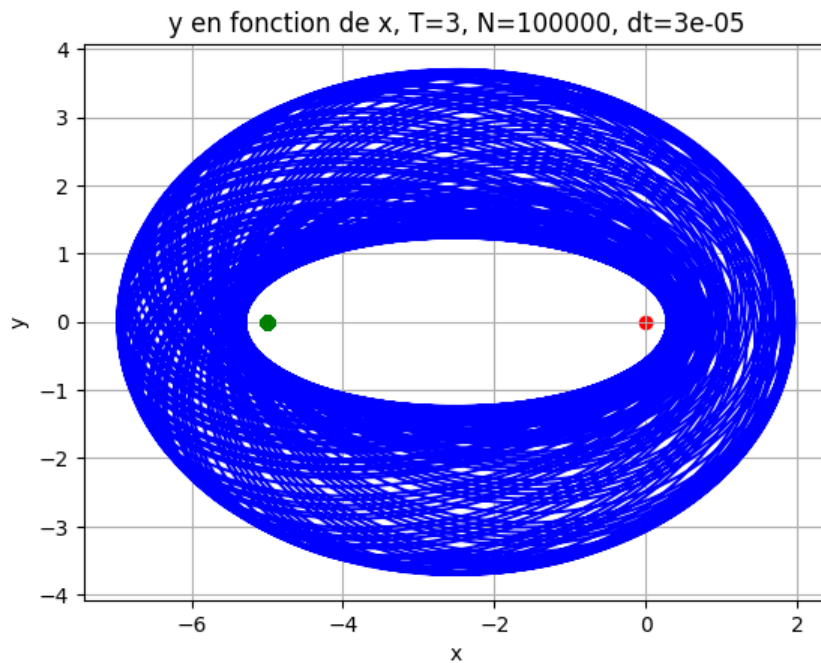


FIGURE 10 – Trajectoire avec Verlet, pour T grand

Vitesse de convergence On a montré précédemment que la vitesse de convergence du schéma d'Euler était d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. On cherche à présent à déterminer l'ordre de vitesse de convergence du schéma de Verlet. L'erreur globale commise par la méthode de Verlet est d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, en traçant la courbe d'équation $\log_{10}(\text{erreur}) = f(\log_{10}(N))$, on devrait obtenir une droite de pente -2. On en déduit donc que cette méthode converge plus vite que celle d'Euler dont la pente est de -1.

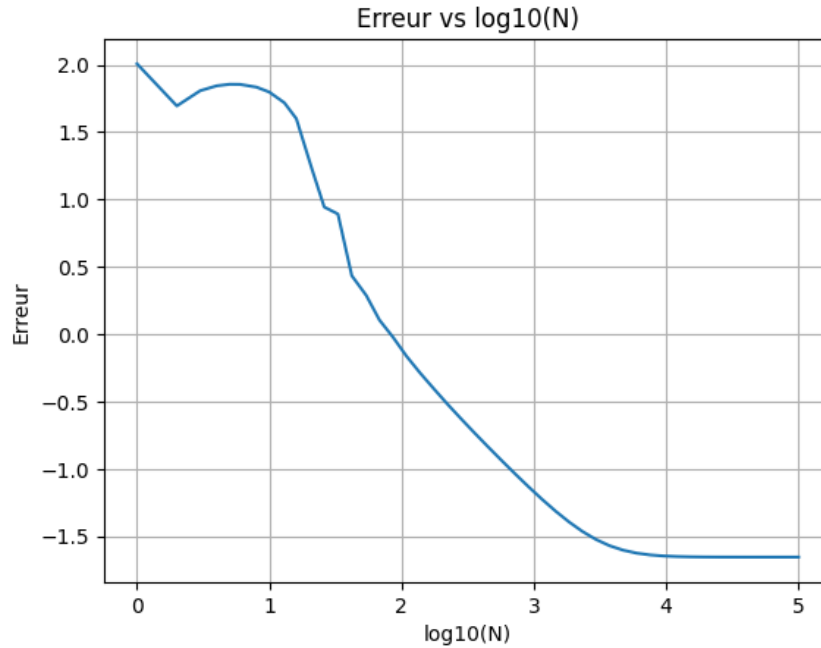


FIGURE 11 – Évolution de $\log_{10}(\text{erreur})$ en fonction de $\log_{10}(N)$ (Verlet)

Commentaire de la figure : Pour des raisons sûrement liées à la méthode de calcul de l'erreur choisie (moyenne des écarts de chaque point à un cercle de rayon 5.5), la courbe ci-dessus n'a pas l'allure attendue. D'autres méthodes ont été testées, mais ne se sont pas montrées concluantes.

5 Pour aller plus loin

5.1 Méthode Leapfrog (saute-mouton)

Dans le schéma saute-mouton, les relations de récurrence sur la position et la vitesse sont les suivantes :

$$x_i = x_{i-1} + v_{i-1/2} \Delta t$$

$$a_i = F(x_i)$$

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + a_i \Delta t$$

où x_i est la position à l'étape i , où $v_{i+1/2}$ est la vitesse, où a est l'accélération et Δt est la durée de chaque pas de temps.

Ces équations peuvent être exprimées dans une forme qui donne de la vitesse au pas entier suivant :

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a_i \Delta t^2,$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) \Delta t.$$

source : page Wikipédia Méthode saute-mouton

La méthode Leapfrog présente l'avantage d'être très efficace et stable (surtout par rapport à la méthode d'Euler) ainsi que de conserver l'énergie du système. Voici plus bas une figure faites avec cette méthode.

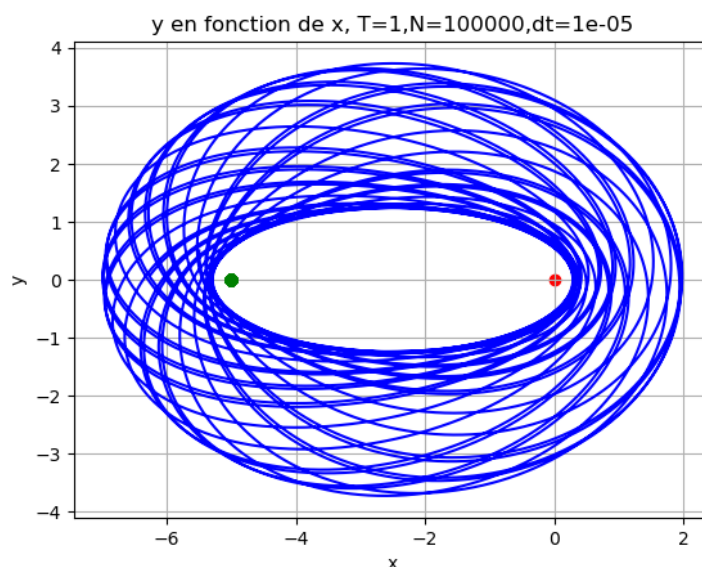


FIGURE 12 – Trajectoire avec la méthode Leapfrog

5.2 Etude d'un système à trois corps

Nous allons maintenant étudier un système à 3 corps et plus particulièrement celui du problème Pythagoricien dont voici l'énoncé :

— Le problème Pythagoricien : système à 3 corps de positions initiales

$$P_1 = (1, 3), \quad P_2 = (-2, 1) \quad \text{et} \quad P_3 = (1, -1)$$

de masses respectives $m_1 = 3$, $m_2 = 4$ et $m_3 = 5$ et ayant des vitesses initiales nulles. Voir l'article :

Complete solution of a general Problem of Three Bodies de Victor Szebehely et C. Frederick Peters.

Pour résoudre ce problème de manière numérique, nous allons utiliser la méthode de Verlet. Cette méthode nous évite de calculer la vitesse, ainsi, nous n'aurons besoin que

de la position et de l'accélération pour obtenir la trajectoire. Le principe du code est le même que pour les exemples précédents. Pour l'accélération, nous sommes partis de la 2nde loi de Newton. Ici les forces extérieures s'appliquant sur le corps i sont les attractions gravitationnelles des corps $j \neq i$. Ce qui donne la formule suivante :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|^3}$$

Avec :

- $\mathbf{r}_i$, le vecteur position du corps i
- G , la constante gravitationnelle (dans le code nous la normalisons à 1)
- m_i , la masse du corps j

Nous transformons cette formule en fonction sur Python prenant les positions et les masses en paramètre. Nous appliquons ensuite le schéma de Verlet (cf code dans le Notebook) et nous obtenons les trajectoires présentées dans les figures suivantes.

De plus, nous avons joint dans le dossier contenant le rendu et le code une courte animation illustrant la trajectoire des trois corps au cours du temps.

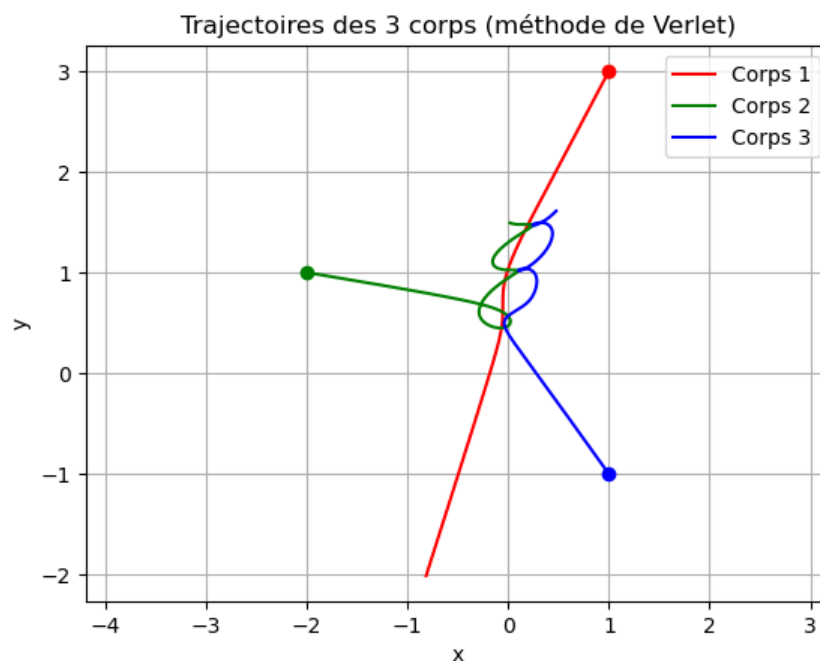


FIGURE 13 – Trajectoire du problème Pythagoricien, avec $t=3$

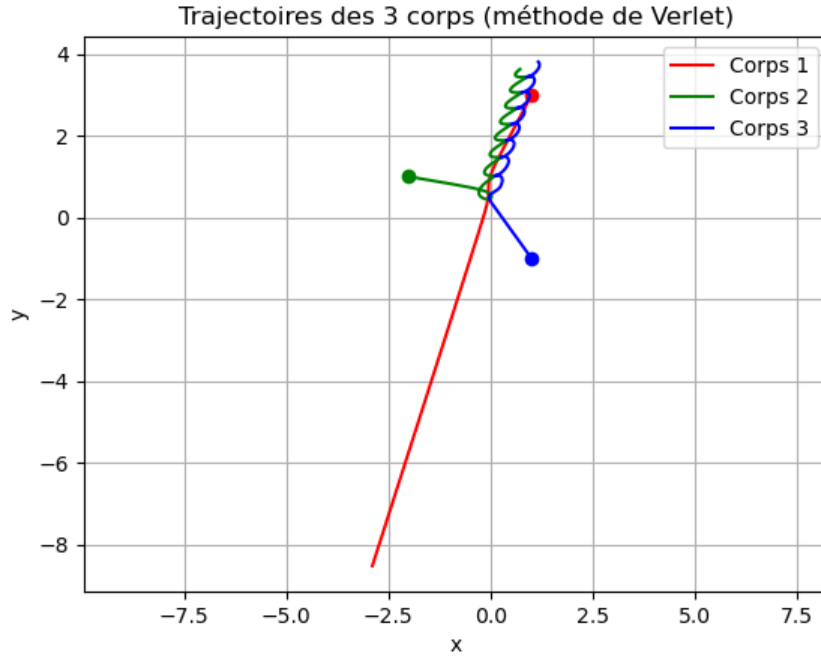


FIGURE 14 – Trajectoire du problème Pythagoricien, avec $t=5$

Solution remarquable Attardons nous maintenant sur une solution remarquable de ce problème. Cette solution est tout d’abord périodique et présente une allure intéressante. Les conditions initiales ont été trouvées par A. Chenciner et R. Montgomery dans leur article *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses* et sont les suivantes :

— Positions initiales :

$$x_1 = -x_2 = 0.97000436, \quad y_1 = -y_2 = -0.24308753, \quad x_3 = y_3$$

— Vitesses initiales :

$$v_{x_3} = -2v_{x_2} = -2v_{x_1} = -0.93240737, \quad v_{y_3} = -2v_{y_2} = v_{y_1} = -0.86473146$$

Avec ces conditions, nous obtenons la trajectoire ci-dessous :

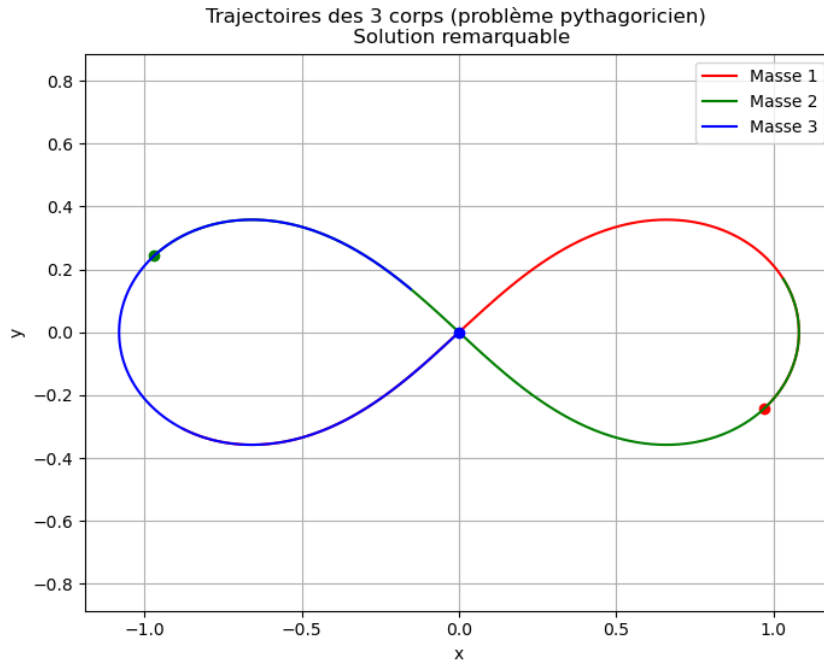


FIGURE 15 – Trajectoire du problème Pythagoricien, solution remarquable

6 Conclusion

Ce projet fut réellement très intéressant et stimulant. Nous avons appliqué différents schémas numériques afin de calculer des trajectoires de corps célestes, qui n'avaient pour certaines pas de formes explicites. Nous avons aussi pu comparer différentes méthodes pour voir lesquelles étaient les plus stables et rapides, de même que leurs avantages respectifs.

Ainsi, nous avons constaté que Euler était la moins bonne méthode : elle n'est pas très précise, ne conserve pas l'énergie et ne permet donc pas de faire des simulation sur une longue période. Cependant, elle est très simple à implémenter.

La méthode de Verlet, quant à elle, permet une bonne conservation de l'énergie sur le long terme ainsi qu'une bonne précision. Elle est donc plus adaptée pour des simulations sur des périodes plus longues. La méthode de Leapfrog, que nous avons moins étudié, semble être plus performante encore que la méthode de Verlet, tout en étant, elle aussi, simple à implémenter.

Enfin, pour aller plus loin, nous aurions pu tester d'autres schémas numériques. On peut par exemple citer la méthode Runge-Kutta d'ordre 4, ou bien des intégrateurs symplectiques tels que le schéma Forest-Ruth ou celui de Yoshida qui sont très adaptés pour les systèmes Hamiltoniens et donc les systèmes célestes (cf *source : page Wikipédia Méthode saute-mouton*).